ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 1983

OPTION M'

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Correction

Première partie

1. On remarque que $\displaystyle\int_0^x \cos(2p\pi t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{2p\pi}\sin(2p\pi t)\right)' \mathrm{d}t = \frac{\sin(2p\pi x)}{2p\pi}$, d'où :

$$S_q(x) = 2\sum_{p=1}^{q} \int_0^x \cos(2p\pi t)\mathrm{d}t = 2\int_0^x \left(\sum_{p=1}^{q}\cos(2p\pi t)\right)\mathrm{d}t.$$

D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{q}\cos(p\alpha) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{p=0}^{q}(e^{i\alpha})^p\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(q+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left[e^{i\frac{q\alpha}{2}}\frac{\sin\left(\frac{q+1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]\\ &= \cos\frac{q\alpha}{2}\frac{\sin\left(\frac{q+1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{p=0}^{q}\cos(p\alpha) = \cos\frac{q\alpha}{2}\frac{\sin\left(\frac{q+1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - 1 = \frac{\cos\left(\frac{q}{2}\alpha\right)\sin\frac{q+1}{2}\alpha - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\left(q+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

En particulier $\displaystyle\sum_{p=1}^{q}\cos(2p\pi t) = \frac{\sin\left(q+\frac{1}{2}\right)2\pi t - \sin\pi t}{2\sin\pi t}$ et donc :

$$S_q(x) = \int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t - x.$$

2. (a) φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0 = \varphi(0)$, donc φ est continue sur $]-1,1[$. En effet, $\forall u \neq 0$,

$$\varphi(u) = \frac{\pi u - \sin\pi u}{\pi u \sin\pi u} = \frac{\frac{\pi^2 u^3}{6} + o(u^3)}{\pi^2 u^2 + o(u^3)} = \frac{\frac{\pi u}{6} + o(1)}{1 + o(1)}$$

Donc $\lim_{u\to 0}\varphi(u) = 0 = \varphi(0)$ et $\lim_{u\to 0}\dfrac{\varphi(u)}{u} = \dfrac{\pi}{6}$. Donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\left|S_q(x) + x - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| &= \left|\int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u}{\sin \pi u}\mathrm{d}u - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| \\
&= \left|\int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u}{\sin \pi u}\mathrm{d}u - \int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u}{\pi u}\mathrm{d}u\right| \\
&= \left|\int_0^x \varphi(u)\sin(2q+1)\pi u \mathrm{d}u\right|
\end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \varphi(u)\sin(2q+1)\pi u \mathrm{d}u\right| &= \left[-\frac{\cos(2q+1)\pi u\varphi(u)}{(2q+1)\pi}\right]_0^x + \frac{1}{(2q+1)\pi}\int_0^x \cos(2q+1)\pi u\varphi'(u)\mathrm{d}u \\
&= -\frac{\cos(2q+1)\pi x\varphi(x)}{(2q+1)\pi} + \frac{1}{(2q+1)\pi}\int_0^x \cos(2q+1)\pi u\varphi'(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\left|S_q(x) + x - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| \leq \frac{|\varphi(x)|}{(2q+1)\pi} + \frac{1}{(2q+1)\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi'(u)|\mathrm{d}u$$

φ étant continue sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc bornée et par conséquent il existe une constante $A_1 > 0$ telle que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left|S_q(x) + x - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| \leq \frac{A_1}{q}.$$

(c) On a $S_q\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{p=1}^{q} \frac{\sin p\pi}{p\pi} = 0$. L'inégalité précédente entraîne, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| \leq \frac{A_1}{q}$. D'où :

$$\lim_{q\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}$$

ou encore

$$\lim_{q\to+\infty} \int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}.$$

Maintenant soit x un réel strictement positif, il existe un entier naturel q tel que $(2q+1)\frac{\pi}{2} \leq x < (2q+3)\frac{\pi}{2}$ ou encore $q \leq \frac{x}{\pi} - \frac{1}{2} < q+1$, donc il suffit de prendre $q = E\left(\frac{x}{\pi} - \frac{1}{2}\right)$. Alors

$$\int_0^x \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v = \int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v + \int_{(2q+1)\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v$$

Ainsi,

$$\left|\int_0^x \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v - \int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| = \left|\int_{(2q+1)\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| \leq \int_{(2q+1)\frac{\pi}{2}}^{(2q+3)\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \ln\frac{2q+3}{2q+1}.$$

Quand x tend vers l'infini, q tend vers l'infini et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v = \lim_{q\to+\infty}\int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}.$$

3. Les S_q sont impaires et 1-périodiques, il suffit d'étudier les S_q sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Comme $\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v$ converge, alors il existe $M>0$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\left|\int_0^x \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| \leq M$. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ et tout $q\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$|S_q(x)| \leq |x| + \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right| + \frac{A_1}{q} \leq \frac{1}{2} + \frac{M}{\pi} + \frac{A_1}{1} = A_2.$$

4. (a) D'après 2.(b), si $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right]$, $\lim_{q\to+\infty} S_q(x) = -x+\frac{1}{2}$. D'où :

$$\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right],\ \lim_{q\to\infty} S_q(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin(2p\pi x)}{p\pi} = \frac{1}{2}-x.$$

Si $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right[$,

$$\lim_{q\to+\infty} S_q(x) = -\lim_{q\to+\infty} S_q(-x) = -x-\frac{1}{2} = |x|-\frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}-|x|\right) = -\lim_{x\to\infty} S_q\left(|x|\right).$$

Si $x\in\mathbf{R}$, $x-<x>\in\mathbf{Z}$, alors par périodicité on obtient :

$$S_q(x) = S_q(x-<x>+<x>) = S_q(<x>)$$

Donc $\lim_{q\to\infty} S_q(x) = 0$ si $x\in\mathbf{Z}$ et $\lim_{q\to\infty} S_q(x) = \frac{1}{2}-<x>$ si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbf{Z}$.

(b) Soit $\begin{array}{cccc} f: & K & \to & \mathbf{R}^+ \\ & x & \mapsto & d(x,\mathbf{Z}) \end{array}$. f est continue sur le compact K, donc atteint son minimum. Soit $\alpha = \min_{x\in K} d(x,\mathbf{Z})$. Comme $K\cap\mathbf{Z}=\varnothing$, alors $\alpha>0$, donc $\forall x\in K$, $\forall r\in\mathbf{Z}$, $|x-r|\geq\alpha$. Soit $x\in K$ et k sa partie entière, donc $k\leq x<k+1$. D'où $\alpha\leq\min(x-k,k+1-x)$. Or $x-k=k+1-x$ si, et seulement si, $x=k+\frac{1}{2}$. Donc $\min_{x\in K} d(x,\mathbf{Z}) \leq \left|k-k+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Donc $\alpha\leq\frac{1}{2}$ et par conséquent $\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap K = \left[\alpha,\frac{1}{2}\right]$. Ainsi par périodicité, il suffit d'étudier la

convergence uniforme sur $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$. Soit donc $x \in \left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|S_q(x) - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right| &\leq \left|S_q(x) + x - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v} \mathrm{d}v\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_{(2q+1)\pi x}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} \mathrm{d}v\right| \\
&\leq \frac{A_1}{q} + \frac{1}{\pi}\left|\int_{(2q+1)\pi x}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} \mathrm{d}v\right|
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que $x \geq x_0$ implique $\frac{1}{\pi}\left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin v}{v} \mathrm{d}v\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit q_1 tel que $(2q_1 + 1)\pi x \geq x_0$, donc $q \geq q_1$ implique

$$\left|S_q(x) - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right| \leq \frac{A_1}{q} + \frac{\varepsilon}{2}$$

et soit $q_2 \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq q_2$ implique $\frac{A_1}{q} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'où

$$\|S_q - S\|_{\infty,[\alpha,\frac{1}{2}]} \leq \varepsilon$$

dès que $q \geq q_0 = \max(q_1, q_2)$ où $S(x) = \frac{1}{2} - x$. Donc la suite de fonctions $(S_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers S sur $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$ et donc sur K.

S n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, donc il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x)\left(\frac{1}{2} - <x>\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2p\pi x)}{p\pi} f(x)$, donc

$$\int_a^b f(x)\left(\frac{1}{2} - <x>\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2p\pi x)}{p\pi} f(x)\right) \mathrm{d}x$$

Si $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, on a la convergence uniforme et donc

$$\int_a^b f(x)\left(\frac{1}{2} - <x>\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\int_a^b f(x)\sin(2p\pi x)\mathrm{d}x$$

Si $[a, b] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$, sur $[a, b]$, $|S_q(x)| \leq A_2$ et donc $\forall x \in [a, b]$, $|S_q(x)f(x)| \leq A_2|f(x)| \leq A_2\|f\|_{\infty,[a,b]}$ et $(S_q f)_{q\geq 1}$ converge simplement vers Sf, où $S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - <x> & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Le théorème de convergence dominée s'applique et donc

$$\lim_{q\to+\infty} \int_a^b S_q(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

D'où :

$$\int_a^b f(x)\left(\frac{1}{2} - <x>\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\int_a^b f(x)\sin(2p\pi x)\mathrm{d}x.$$

Partie II

1. (a) On sait que la dérivée de $x \mapsto e^{f(x)}$ est $x \mapsto f'(x)e^{f(x)}$. Par définition $x^{-z} = e^{-z\ln x}$ pour $x > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, donc $\displaystyle\int x^{-z}\mathrm{d}x = \frac{x^{1-z}}{1-z} + \text{cte}$ si $z \neq 1$ et $\displaystyle\int x^{-z}\mathrm{d}x = \ln x + \text{cte}$ si $z = 1$.

(b) La propriété est vraie pour $n = 1$ puisque $1^{-1} = 1 = 1 + \displaystyle\int_1^1 x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_1^1 < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x$.

Soit $n \geq 2$ supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-z} = \sigma_n(z)$ où $\sigma_n(z) = 1 + \displaystyle\int_1^n x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_1^n < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}(z) &= 1 + \int_1^{n+1} x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_1^{n+1} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^{-z} + \int_n^{n+1} x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_n^{n+1} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^{-z} + \int_n^{n+1} x^{-z-1}\left(x - z < x >\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^{-z} + \int_n^{n+1} x^{-z-1}\left(x - z(x-n)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^{-z} + (1-z)\int_n^{n+1} x^{-z}\mathrm{d}x + nz\int_n^{n+1} x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^{-z} + (1-z)\frac{1}{1-z}\left[x^{-z+1}\right]_n^{n+1} + nz\frac{1}{-z}\left[x^{-z}\right]_n^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^{-z} + (n+1)^{-z} = \sum_{k=1}^{n+1} k^{-z}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par le principe récurrence.

(c) Soit s strictement positif et différent de 1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^{-s} &= 1 + \int_1^n x^{-s}\mathrm{d}x - s\int_0^n < x > x^{-s-1}\mathrm{d}x \\
&= 1 + \left[\frac{x^{-s+1}}{1-s}\right]_1^n - s\int_1^n < x > x^{-s-1}\mathrm{d}x \\
&= 1 + \frac{n^{-s+1}-1}{1-s} - s\int_1^n < x > x^{-s-1}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Mais $0 < s\displaystyle\int_1^n < x > x^{-s-1}\mathrm{d}x < s\int_1^{+\infty} x^{-s-1}\mathrm{d}x = s\left[\frac{x^{-s}}{-s}\right]_1^{+\infty} = 1$, donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^{-s} - \left(1 + \frac{n^{1-s}-1}{1-s}\right)\right| < 1.$$

Donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^{-s} - \left(1 + \frac{n^{1-s}-1}{1-s} - \frac{1}{2}\right)\right| = \left|s\int_1^n < x > x^{-s-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\right| \leq 1 - \frac{1}{2} = 0.5.$$

Si $s = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\simeq} \frac{1}{2} + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2} + \ln n$.

2. (a) $\forall x \in [1, +\infty[$, $| < x > x^{-z-1}| \leq |x^{-z-1}| = \left|e^{-(z+1)\ln x}\right| = e^{-(s+1)\ln x} = \dfrac{1}{x^{s+1}}$. Si $s + 1 > 1$, c'est-à-dire si $s > 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x$ converge absolument, donc elle converge.

(b) Soit $z \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^{-z} &= 1 + \int_1^n x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_0^n < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= 1 + \left[\frac{x^{-z+1}}{1-z}\right]_1^n - z\int_1^n < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= 1 + \frac{n^{-z+1}-1}{1-z} - z\int_1^n < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{z - n^{-z+1}}{z-1} - z\int_1^n < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

De plus on a $\left|n^{-z+1}\right| = \left|e^{(-z+1)\ln n}\right| = e^{(1-s)\ln n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini (car $1 - s < 0$). D'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k^{-z} = \frac{z}{z-1} - z\int_1^{+\infty} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x = \zeta(z).$$

(c) Soient $z \in \Omega$ et $y \geq n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}
\zeta(z) - \sum_{k=1}^{n} k^{-z} &= \frac{z}{z-1} - z\int_1^{+\infty} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x - 1 - \int_1^n x^{-z}\mathrm{d}x + z\int_1^n < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{z}{z-1} - 1 - \left[\frac{x^{-z+1}}{1-z}\right]_1^n - z\int_n^{+\infty} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{z-1} - \frac{n^{-z+1}-1}{1-z} - z\int_n^{+\infty} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^{-z+1}}{z-1} - z\int_n^{+\infty} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^{1-z}}{z-1} + z\int_n^{+\infty}\left(\frac{1}{2} - < x >\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x - \frac{z}{2}\int_n^{+\infty} x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^{1-z}}{z-1} + z\int_n^{y}\left(\frac{1}{2} - < x >\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x + z\int_y^{+\infty}\left(\frac{1}{2} - < x >\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&\quad -\frac{z}{2}\int_n^{+\infty} x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^{1-z}}{z-1} + z\int_n^{y}\left(\frac{1}{2} - < x >\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x + \frac{z}{2}\int_y^{+\infty} x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&\quad -z\int_y^{+\infty} < x > x^{-z-1}\mathrm{d}x - \frac{z}{2}\int_n^{+\infty} x^{-z-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^{1-z}}{z-1} + z\int_n^{y}\left(\frac{1}{2} - < x >\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x - \frac{z}{2}\left[\frac{x^{-z}}{-z}\right]_n^{+\infty} \\
&\quad +z\int_y^{+\infty}\left(\frac{1}{2} - < x >\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

D'où, en tenant compte de l'égalité de la question **5.** de la partie I, pour tout $z \in \Omega$ et tout $y \geq n$, on a :

$$\zeta(z) - \sum_{k=1}^{n} k^{-z} = \frac{n^{1-z}}{z-1} - \frac{n^{-z}}{2} + z\int_y^{+\infty}\left(\frac{1}{2} - < x >\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x + \frac{z}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\int_n^y x^{-z-1}\sin(2p\pi x)\mathrm{d}x.$$

3. • La fonction g est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ et

$$g'(x) = x^{\frac{-5}{2}}\left(\frac{\frac{3}{2}}{2p\pi - \frac{t}{x}} + \frac{\frac{t}{x}}{\left(2p\pi - \frac{t}{x}\right)^2}\right) = \frac{x^{\frac{-5}{2}}}{p}\left(\frac{\frac{3}{2}}{2\pi - \frac{t}{px}} + \frac{\frac{tp}{x}}{p^2\left(2\pi - \frac{t}{xp}\right)^2}\right)$$

Or $-n \leq t \leq n \leq x$, donc $\dfrac{t}{x} \leq 1$ puis $\dfrac{t}{px} \leq \dfrac{1}{p}$, d'où :

$$g'(x) = \frac{x^{\frac{-5}{2}}}{p}\left(\frac{\frac{3}{2}}{2\pi - \frac{t}{px}} + \frac{\frac{t}{x}}{\left(2\pi - \frac{t}{xp}\right)\left(2p\pi - \frac{t}{x}\right)}\right) \leq \frac{x^{\frac{-5}{2}}}{p}\left(\frac{\frac{3}{2}}{2\pi - \frac{1}{p}} + \frac{1}{\left(2\pi - \frac{1}{p}\right)(2p\pi - 1)}\right)$$

Mais $2\pi - \dfrac{1}{p} > \pi$ et $2p\pi - 1 > \pi$, donc

$$g'(x) \leq \frac{B_1}{p} x^{\frac{-5}{2}}$$

où $B_1 = \dfrac{3}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi^2}$.
• D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it} e^{2ip\pi x} \mathrm{d}x &= \int_n^y x^{\frac{-3}{2}} e^{i(2p\pi x - t\ln x)} \mathrm{d}x \\
&= \int_n^y \frac{-ix^{\frac{-3}{2}}}{2p\pi - \frac{t}{x}} i \left(2p\pi - \frac{t}{x}\right) e^{i(2p\pi x - t\ln x)} \mathrm{d}x \\
&= -i \int_n^y g(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(e^{i(2p\pi x - t\ln x)}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-ig(x) e^{i(2p\pi x - t\ln x)}\right]_n^y + i \int_n^y g'(x) e^{i(2p\pi x - t\ln x)} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it} e^{2ip\pi x} \mathrm{d}x\right| \leq |g(y)| + |g(x)| + \int_n^y |g'(x)| \mathrm{d}x$$

Comme $|g(y)| = \left|\dfrac{y^{\frac{-3}{2}}}{2\pi p - \frac{t}{y}}\right| \leq \dfrac{y^{\frac{-3}{2}}}{2p\pi - 1}$ et $|g(x)| = \left|\dfrac{x^{\frac{-3}{2}}}{2\pi p - \frac{t}{x}}\right| \leq \dfrac{x^{\frac{-3}{2}}}{2p\pi - 1}$, donc $|g(y)| + |g(x)| \leq \dfrac{2x^{\frac{-3}{2}}}{2p\pi - 1}$ puisque $x \leq y$ et

$$\int_n^y |g'(x)| \mathrm{d}x \leq \int_n^y \frac{B_1}{p} x^{\frac{-5}{2}} = \frac{2B_1}{3p} \left(n^{\frac{-3}{2}} - y^{\frac{-3}{2}}\right) \leq \frac{2B_1}{3p} n^{\frac{-3}{2}}.$$

D'où :

$$\left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it} e^{2ip\pi x} \mathrm{d}x\right| \leq \frac{2x^{\frac{-3}{2}}}{2p\pi - 1} + \frac{2B_1}{3p} n^{\frac{-3}{2}}$$

Or $n < x$ implique $n^{\frac{3}{2}} < x^{\frac{3}{2}}$ et donc

$$\left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it} e^{2ip\pi x} \mathrm{d}x\right| \leq \frac{2n^{\frac{-3}{2}}}{2p\pi - 1} + \frac{2B_1}{3p} n^{\frac{-3}{2}} = \frac{n^{\frac{-3}{2}}}{p} \left(\frac{2}{2\pi - \frac{1}{p}} + \frac{2B_1}{3}\right) \leq \frac{n^{\frac{-3}{2}}}{p} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{2B_1}{3}\right)$$

Il suffit donc de prendre $B_2 = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2B_1}{3}$.
•

$$\begin{aligned}
\left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it} \sin(2p\pi x) \mathrm{d}x\right| &= \frac{1}{2} \left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it} \left(e^{2ip\pi x} - e^{-2ip\pi x}\right) \mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it} e^{2ip\pi x} \mathrm{d}x\right| + \frac{1}{2} \left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it} e^{-2ip\pi x} \mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

D'autre part, $\left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it}e^{-2ip\pi x}\mathrm{d}x\right| = \left|i\int_n^y \frac{x^{\frac{-3}{2}}}{2p\pi+\frac{t}{x}}\left(-i\left(2p\pi+\frac{t}{x}\right)\right)e^{-it\ln x-2ip\pi x}\mathrm{d}x\right|$. Si on note $g_t(x) = \dfrac{-x^{\frac{-3}{2}}}{2p\pi-\frac{t}{x}}$ alors $g_{-t}(x) = \dfrac{-x^{\frac{3}{2}}}{2p\pi+\frac{t}{x}} = g_{t'}(x)$. Même raisonnement donne $\left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it}e^{-2ip\pi x}\mathrm{d}x\right| \leq \dfrac{B_2}{n^{\frac{3}{2}}p}$. D'où :

$$\left|\int_n^y x^{\frac{-3}{2}-it}\sin(2ip\pi x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{B_2}{n^{\frac{3}{2}}p}.$$

4. Utilisons la question **2.(c)** de cette partie avec $z=\dfrac{1}{2}+it$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)-\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{1}{2}-it}\right| &\leq \left|\frac{n^{\frac{1}{2}-it}}{-\frac{1}{2}+it}\right|+\frac{1}{2}\left|n^{-\frac{1}{2}-it}\right|+\left|\left(\frac{1}{2}+it\right)\int_y^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-<x>\right)x^{-\frac{3}{2}-it}\mathrm{d}x\right| \\
&+ \left|\frac{z}{\pi}\right|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left|\int_n^y x^{-\frac{3}{2}-it}\sin(2p\pi x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}}+\frac{\sqrt{n}^{-1}}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\left|\int_y^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-<x>\right)x^{-\frac{3}{2}-it}\mathrm{d}x\right| \\
&\quad +\frac{|z|}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\frac{B_2}{n^{\frac{3}{2}}p}
\end{aligned}$$

et ceci pour tout $y\geq n$, on obtient, en particulier et quand y tend vers $+\infty$, l'inégalité :

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)-\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{1}{2}-it}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{\pi B_2\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}}{6n^{\frac{3}{2}}}.$$

En utilisant ensuite les inégalités $\sqrt{\dfrac{1}{4}+t^2}\leq 1+|t|\leq 3\sqrt{\dfrac{1}{4}+t^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)-\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{1}{2}-it}\right| &\leq \frac{3\sqrt{n}}{1+|t|}+\frac{\sqrt{n}}{1+|t|}\times\frac{1+|t|}{2n}+\frac{\pi B_2}{3}\times\frac{1+|t|}{2n}\times\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{3\sqrt{n}}{1+|t|}+\frac{\sqrt{n}}{1+|t|}+\frac{\pi B_2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

car $-n<t<n$ implique $\dfrac{1+|t|}{2n}<\dfrac{n+1}{2n}<1$, donc

$$\begin{aligned}
\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)-\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{1}{2}-it}\right| &\leq \frac{4\sqrt{n}}{1+|t|}+\frac{2\pi B_2}{3}\times\frac{\sqrt{n}}{1+|t|}\times\frac{1+|t|}{2n} \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{1+|t|}\left(4+\frac{2\pi B_2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Soit $B_3 = 4 + \dfrac{2\pi B_2}{3}$, on a donc $\forall n \geq 1, \forall t \in [-n, n]$, $\left| \zeta\left(\dfrac{1}{2} + it\right) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it} \right| \leq B_3 \dfrac{\sqrt{n}}{1+|t|}$.

Partie III

dans cette partie n est un entier supérieur ou égal à 2

1. (a) Soit $\varphi(x) = \ln(x) - 1 + \dfrac{1}{x}$ ou $x \in]0, +\infty[$. $\varphi'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ et $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, donc $\forall x > 0$, $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$ ou encore $\forall x > 0$, $\ln(x) - 1 + \dfrac{1}{x} \geq 0$.

(b) Soit k un entier de $[\![1, n]\!]$. Pour tout entier j tel que $\dfrac{k}{2} < j < k$, $\ln\left(\dfrac{k}{j}\right) \geq 1 - \dfrac{j}{k}$ et donc $\dfrac{1}{\ln\left(\frac{k}{j}\right)} \leq \dfrac{k}{k-j}$. D'où :

$$\frac{1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)} \leq \frac{k}{\sqrt{kj}(k-j)} \leq \sqrt{\frac{k}{j}} \times \frac{1}{k-j} \leq \frac{\sqrt{2}}{k-j},$$

ce qui donne :

$$\sum_{\frac{k}{2}<j<k} \frac{1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)} \leq \sum_{\frac{k}{2}<j<k} \frac{\sqrt{2}}{k-j} \leq \sqrt{2}\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h}.$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \frac{k}{2}<j<k}} \frac{1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2} \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h} \leq \sqrt{2} \sum_{1\leq h\leq k\leq n} \frac{1}{h}.$$

(c) Soit k fixé. On sait que : $\displaystyle\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h} \leq 1 + \int_1^k \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln k$, donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{k} \frac{\sqrt{2}}{h} \leq \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n}(1+\ln k) \leq \sqrt{2}\left(n + \sum_{k=1}^{n} \ln k\right) \leq \sqrt{2}(n + n\ln n)$$

et comme $n \leq 2n\ln 2 \leq 2n\ln n$, alors

$$\sqrt{2} \sum_{1\leq h\leq k\leq n} \frac{1}{h} \leq 3\sqrt{2}n\ln n.$$

Ainsi $C_1 = 3\sqrt{2}$ convient pour majorer l'inégalité précédente.

2. (a) Pour tout j et k des entiers tels que $1 \leq j \leq \dfrac{k}{2}$, on a $\ln\left(\dfrac{k}{j}\right) \geq \ln 2$. Donc :

$$\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{1\leq j\leq \frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)} \leq \frac{1}{\ln 2}\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{1\leq j\leq \frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{kj}} \leq \frac{1}{\ln 2}\sum_{1\leq k,j\leq n} \frac{1}{\sqrt{kj}} \leq \frac{1}{\ln 2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2.$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 1 + \left[2\sqrt{t}\right]_1^n = 2\sqrt{n} - 1$, donc

$$\frac{1}{\ln 2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \leq \frac{1}{\ln 2}(2\sqrt{n}-1)^2 \leq \frac{1}{\ln 2}(2\sqrt{n})^2 = \frac{4}{\ln 2} n$$

Donc $C_2 = \dfrac{4}{\ln 2}$ convient.

3. (a)

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{-1}{2}-it}\right|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{-1}{2}-it}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{-1}{2}+it}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1\leq k,j\leq n \\ j\neq k}} \frac{1}{\sqrt{kj}} k^{-it} j^{it} \end{aligned}$$

D'autre part, pour $k \neq j$, $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{n}{k}$ et

$$\int_0^n \frac{1}{\sqrt{kj}} k^{-it} j^{it} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{kj}} \int_0^n e^{it\ln\left(\frac{j}{k}\right)} \mathrm{d}t = \frac{1}{i\sqrt{kj}\ln\left(\frac{j}{k}\right)}\left[e^{it\ln\left(\frac{j}{k}\right)}\right]_0^n = i\frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in} - 1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)}.$$

Donc en sommant tous les termes,

$$\int_0^n \left|\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{-1}{2}-it}\right|^2 \mathrm{d}t = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + i \sum_{\substack{1\leq k,j\leq n \\ j\neq k}} \frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in} - 1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)}.$$

(b) $\displaystyle n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq n(1+\ln n) \leq 3n\ln n$ et

$$\begin{aligned} \left| i \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n \\ j\neq k}} \frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in} - 1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)} \right| &\leq \sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{2}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)} + \sum_{1\leq k<j\leq n} \frac{2}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)} \\ &\leq 4 \sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)} \\ &\leq 4(C_1 n\ln n + C_2 n) \\ &\leq 4(C_1 + 2C_2) n\ln n. \end{aligned}$$

Donc $C_3 = 3 + 4(C_1 + 2C_2)$ convient.

4. La fonction $t \mapsto \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2$ est continue sur $[0,1]$, et donc majorée sur cet intervalle par une certaine constante M_1.
Pour $0 \leq T \leq 1$, on a donc : $\displaystyle\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leq M_1 T$, ce dernier terme pouvant être majoré par $M_2 T\ln(T+2)$, M_2 étant une constante qu'il suffit de choisir supérieure à $\dfrac{M_1}{\ln(2)}$.
Pour $T \geq 1$, $\displaystyle\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^{[T]+1} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t$, où $[T]$ désigne la partie entière de T. $[T]+1$ étant un entier supérieur ou égal à 2, on utilise le résultat de la question **3 b)** de cette partie, pour majorer la dernière intégrale par $C_{.}\left([T]+1\right)\ln\left([T]+1\right) \leq C_3(T+1)\ln(T+1)$ compte tenu de $[T] \leq T$.
La fonction $T \mapsto \dfrac{C_3(T+1)\ln(T+1)}{T\ln(T+2)}$ est continue et bornée sur $[1,+\infty[$ (elle tend vers C_3 à l'infini), et donc majorée sur $[1,+\infty[$ par une certaine constante M_2.
Par conséquent la dernière intégrale est majorée par $M_2 T\ln(T+2)$ sur $[1,+\infty[$. En choisissant $C = \max(M_1, M_2)$, on obtient :

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leq CT\ln(T+2),$$

pour tout $T \geq 0$.